MPSI 2024/2025 | DS n°5 (4h)

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La calculatrice est autorisée

Consignes à suivre :

- Numéroter les pages. Numéroter les questions (inutile d'écrire les titres).
- Soigner la rédaction & soigner la présentation : aérer la copie, encadrer ou souligner les résultats.
- Lire rapidement l'ensemble du sujet en début d'épreuve : les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- Pour un exercice donné, traiter et rendre les questions dans l'ordre.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne sera pas prise en compte.

I - Modélisation électrique de l'étude thermique d'un bâtiment

Sous certaines hypothèses (*que vous découvrirez l'année prochaine*), il est possible de dresser une analogie parfaite entre les mouvements d'énergie thermique et d'énergie électrique. Voici des grandeurs analogues :

Potentiel électrique V $\leftrightarrow$ Température T

Intensité (flux de charge) i $\leftrightarrow$ Flux thermique ϕ_{th}

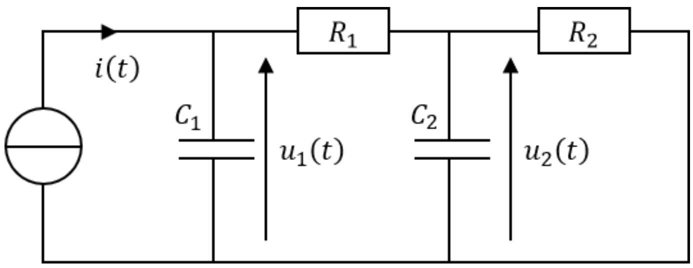
Ainsi, un mur séparant l'intérieur d'un bâtiment de température T_i de l'extérieur de température T_e, agit comme une résistance thermique R_{th} qui réduit le flux thermique allant de l'extérieur vers l'intérieur :

$$R_{th} = \frac{T_e - T_i}{\phi_{th}}$$

La valeur de ϕ_{th} dépends des propriétés physiques et géométriques de mur.

1) À quelle loi de l'électrocinétique la relation précédente est-elle l'analogue ? Justifier rigoureusement.

Dans la suite de l'exercice, on présente et étudie un circuit qui modélise les propriétés thermiques d'un ensemble {pièce, radiateur, mur}.



2) Que devient ce circuit électrique en régime permanent continu ? Exprimer alors la tension $u_2(t \to \infty)$ en fonction, entre autres, de $u_1(t \to \infty)$.

Afin d'étudier le comportement du circuit en régime variable, on se place en régime sinusoïdal forcé. À tout signal sinusoïdal $x(t)$ de pulsation ω, on associe la grandeur complexe $\underline{x}(t)$ et l'amplitude complexe est $\underline{X}(\omega)$ avec :

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi) = \mathcal{R}e\left(\underline{x}(t)\right) \qquad \underline{x}(t) = X_0\, e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{X}(\omega)\ e^{j\omega t} \qquad \underline{X}(\omega) = X_0\, e^{j\phi}$$

La référence de phase sera prise sur la grandeur $i(t)$ délivrée par le générateur de courant :

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

3) Exprimer l'impédance $\underline{Z_2}$ relative à l'association de la résistance R_2 avec le condensateur de capacité C_2.

4) Exprimer l'impédance $\underline{Z_1}$ relative à l'association de la résistance R_1 avec l'impédance $\underline{Z_2}$.

5) Exprimer l'impédance $\underline{Z_{eq}}$ de l'ensemble du montage (des deux résistances et des deux condensateurs). Exprimer le lien $\underline{i}(t)$, $\underline{u_1}(t)$ et $\underline{Z_{eq}}$.

6) En déduire que la relation reliant $\underline{U_1}$ à I_0 est donnée par :

$$\underline{U_1} = \frac{R_1 + R_1 + j\omega R_1 R_2 C_2}{1 + j\omega\left[(R_1 + R_2)\,C_1 + R_2 C_2\right] - R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2}\, I_0$$

7) Exprimer U_{10}, la valeur de $\underline{U_1}$ pour $\omega = 0$.

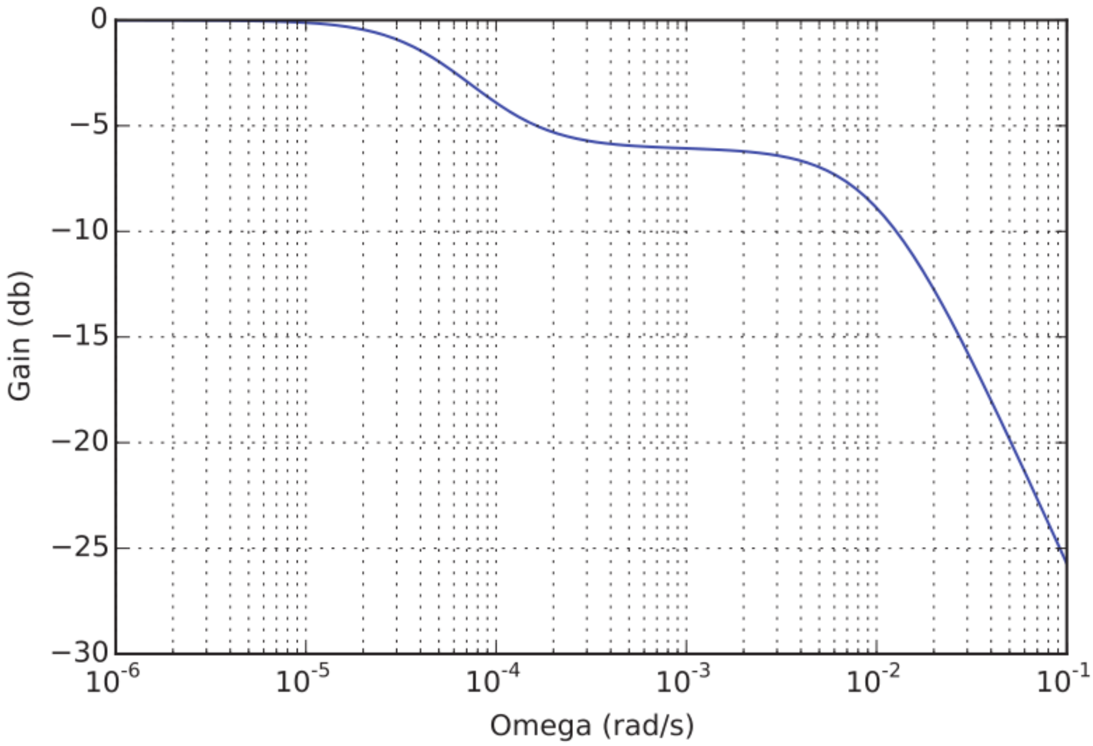
8) On appelle fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{U_1}}{U_{10}}$. Quelle est la nature du filtre ?

9) Exprimer en fonction de R, C et α la fonction de transfert $\underline{H}$ dans le cas où $R_1 = R_2 = \dfrac{R}{2}$ et $C_2 = \alpha C_1 = \alpha C$. On gardera cette expression pour la suite.

10) Établir les expressions des asymptotes de $\underline{H}$ en basses et hautes fréquences.

11) Tracer le diagramme de Bode asymptotique basses et hautes fréquences en précisant bien le point d'intersection.

12) En pratique, pour $\alpha = 200$, on obtient le diagramme de Bode donné ci-dessous. Mettre clairement en évidence, sur le diagramme, des zones rectilignes. Ce diagramme est-il cohérent avec les questions précédentes ?



Pour expliquer complètement la forme du graphique, il faut réécrire la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{\underline{H_2}}{\underline{H_1} \times \underline{H_3}} \quad \text{avec :} \quad \underline{H_i} = 1 + \frac{j\omega}{\omega_i} \quad \text{où} \quad i = 1, 2, 3$$

13) Tracer le diagramme Bode asymptotique en gain d'une fonction de transfert $\underline{H_i}$. Pour quelle valeur ω_i le gain en décibel $G_{dB,i}$ varie-t-il de 3 dB par rapport à sa valeur en $\omega = 0$?

14) Exprimer $G_{dB} = 20\,\log(|\underline{H}|)$ en fonction des $G_{dB,i} = 20\,\log\left(\left|\underline{H_i}\right|\right)$.

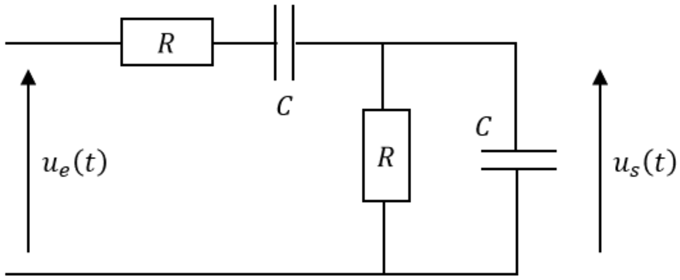
15) Sur le diagramme de l'énoncé, superposer au diagramme réel le diagramme de Bode asymptotique complet (pas uniquement basses et haute fréquences). Placer les trois pulsations particulières ω_i. **Ne pas oublier de rendre l'énoncé si cette question est traitée !**

16) Définir la pulsation de coupure ω_c du filtre et déterminer graphiquement sa valeur. Estimer alors, en justifiant, la durée τ du régime transitoire.

- Fin de la partie I -

II - Étude d'un Filtre de Wien

On considère le quadripôle ci-dessous en sortie ouverte, alimenté par une tension d'entrée $u_e(t)$ sinusoïdale. On donne : $C = 0,2$ µF et $R = 1,0$ kΩ.



17) Déterminer qualitativement la nature de ce quadripôle par une étude du comportement asymptotique en hautes et basses fréquences.

18) Déterminer la fonction de transfert complexe en sortie ouverte $\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}}$. Mettre cette fonction de transfert sous forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad \text{avec :} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

avec x la pulsation réduite. En déduire l'expression du facteur de qualité Q, de la pulsation propre ω_0 du filtre et du gain statique H_0.

19) Déterminer l'expression du gain en décibels $G_{dB}(x)$ et du déphasage $\phi(x)$ entre le signal de sortie et l'entrée.

20) Calculer le gain maximum de ce filtre, ainsi que le déphasage et le gain en décibels correspondant.

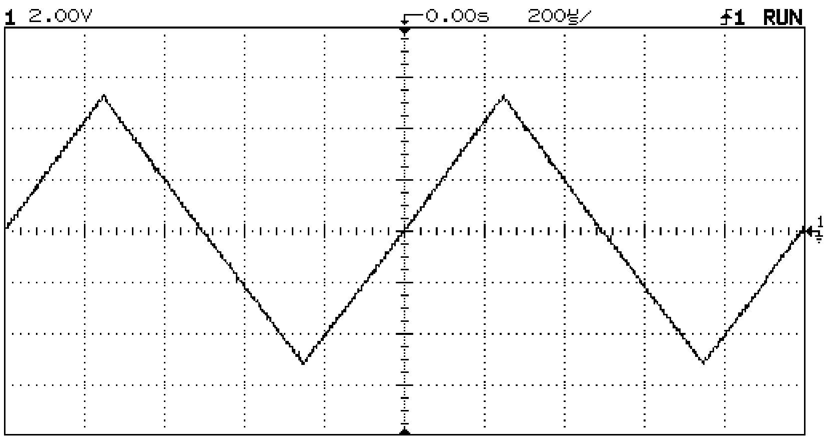
21) Déterminer les expressions des pulsations réduites de coupure x_{c1} et x_{c2} et en déduire que la largeur de la bande passante du filtre de Wien vaut : $\Delta x_c = 1/Q$

22) Tracer le diagramme de Bode asymptotique pour le gain $G_{dB}(t)$. Justifier et tracer l'allure de la courbe réelle.

23) Tracer le diagramme de Bode asymptotique pour la phase $\phi(t)$. Justifier et tracer l'allure de la courbe réelle.

24) Ce quadripôle peut-il servir d'intégrateur ou de dérivateur ? Justifier clairement à l'aide des équivalents de la fonction de transfert complexe en basses et hautes fréquences.

On applique maintenant un signal triangulaire $u_{e2}(t)$, de pulsation ω_2 et d'amplitude E_2 représenté sur la figure ci-dessous.



Le signal d'entrée $u_{e2}(t)$ est décomposable en série de Fourier et s'écrit sous la forme :

$$u_{e2}(t) = -\frac{8E_2}{\pi^2} \sum_{n \,\in\, 2\mathbb{N}+1} \frac{\cos(n\omega_2 t)}{n^2}$$

où $2\mathbb{N} + 1$ désigne l'ensemble des entiers naturels impairs.

25) Rappeler de manière synthétique l'action d'un filtre linéaire et non-linéaire sur un signal d'entrée périodique.

26) Tracer précisément le spectre en amplitude du signal $u_{e2}(t)$.

27) Calculer numériquement la pulsation réduite $x_2 = \omega_2/\omega_0$.

28) En déduire l'allure du signal de sortie correspondant $u_{s2}(t)$.

29) Mettre le signal de sortie $u_{s2}(t)$ sous la forme d'une série de Fourier :

$$u_2(t) = \sum_{n \,\in\, 2\mathbb{N}+1} S_n \cos(n\omega_2 t + \phi_n)$$

Préciser pour l'harmonique de rang n l'expression de l'amplitude S_n et la phase à l'origine ϕ_n.

30) Faire l'application numérique des premières valeurs des S_n ? Quelle approximation peut-on faire pour le signal de sortie $u_{s2}(t)$?

- Fin de la partie II -

III - Modélisation d'un filtre ADSL

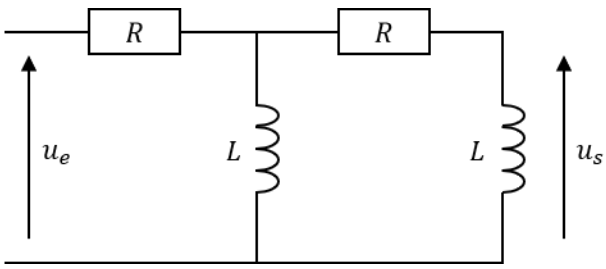
Les signaux transmis par une ligne téléphonique utilisent une très large gamme de fréquences, divisée en deux parties :

- les signaux téléphoniques (transmettant la voix) utilisent les fréquences de 0 à 4 kHz ;
- les signaux informatiques (internet) utilisent les fréquences de 25 kHz à 2 MHz.

Un filtre placé en amont du téléphone permet de filtrer les signaux informatiques afin de récupérer uniquement les signaux téléphoniques. Similairement, un filtre placé au niveau de la box internet permet de filtrer les signaux téléphoniques afin de récupérer uniquement les signaux informatiques.

31) Quel type de filtre faut-il utiliser pour récupérer seulement les signaux téléphoniques ? Les signaux informatiques ? Quelle fréquence de coupure peut-on choisir ?

On utilise le circuit ci-dessous.



32) Quel type de signaux ce filtre peut-il récupérer ?

33) Montrer que la fonction de transfert de ce filtre peut se mettre sous la forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{-x^2}{1 + 3jx - x^2} \quad \text{avec :} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

où x est la pulsation réduite et ω_0 à déterminer en fonction de R et L.

34) Ce filtre présente-t-il une résonance ? Si oui, déterminer l'expression de la pulsation de résonance ω_{res}.

35) Tracer le diagramme de Bode asymptotique de ce filtre, puis esquisser l'allure de la courbe réelle de gain en décibel en la justifiant.

36) Vous possédez des résistances de $R = 100\,\Omega$. Quelle valeur d'inductance L devez-vous choisir pour réaliser le filtre souhaité ?

- Fin de la partie III -